

सांख्यिकीसह-संबंधतीन विधियां

- (A) कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक
 (B) स्पीयरमैन की कोरि अंतर शक्ति
 (C) संगामी विचलन शक्ति

(A) कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक

$$r = \frac{\sum dx dy - \left(\frac{\sum dx \times \sum dy}{N} \right)}{\sqrt{\left[\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N} \right]} \sqrt{\left[\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N} \right]}}$$

सहसंबंध का माप

यदि $r = 0$ आए तो कोई सहसंबंध नहीं

0 से .50 के मध्य :- निम्न श्रेणी का सहसंबंध

.50 से .75 के मध्य :- मध्यम श्रेणी का सहसंबंध

.75 से 1 के मध्य :- उच्च श्रेणी का सहसंबंध

1 पूर्ण सहसंबंध

प्रश्न में जो मूल्य दिए उसमें प्रथम को x तथा दूसरे को y मानें।

प्रकार विचलन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करो:-

पति की आय	23	27	28	28	29	30	31	33	35	36
पत्नी की आय	18	20	22	27	21	29	27	29	28	29

हल:- माना की पति की आय x व पत्नी की y

x	dx = x - 23	dx ²	y	dy = y - 18	dy ²	-dxdy
23	0	0	18	0	0	0
27	4	16	20	2	4	8
28	5	25	22	4	16	20
28	5	25	27	9	81	45
29	6	36	21	5	25	30
30	7	49	29	11	121	77
31	8	64	27	9	81	72
33	10	100	29	11	121	110
35	12	144	28	10	100	120
36	13	169	29	11	121	143
\sum	70	628	10	70	654	613
N	$\sum dx$	$\sum dx^2$	N	$\sum dy$	$\sum dy^2$	$\sum dxdy$

$$r = \frac{\sum dxdy - \left(\frac{\sum dx \times \sum dy}{N} \right)}{\sqrt{\left[\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N} \right]} \sqrt{\left[\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N} \right]}}$$

$$r = \frac{613 - \left(\frac{70 \times 70}{10} \right)}{\sqrt{\left[628 - \frac{70^2}{10} \right]} \sqrt{\left[654 - \frac{70^2}{10} \right]}} \Rightarrow \frac{613 - 490}{\sqrt{[628 - 490]} \sqrt{[654 - 490]}}$$

$$r = \frac{123}{\sqrt{138 \times 164}} \Rightarrow \frac{123}{150.44} = .82$$

उच्च ऋणी व धनात्मक सहसंबंध

सह संबंध गुणांक वा निर्वाचन :-

यदि r , संभाव्य विचलन (Probable error or P.E.) के 6 गुने से अधिक हो तो सहसंबंध अर्थपूर्ण या सांख्यिक माना जाता है अन्यथा नहीं।

P.E. निम्न सूत्र द्वारा प्राप्त करते हैं

$$P.E. = \frac{2}{3} \times \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

जैसे $r = .82$ तथा $N = 10$ का

$$P.E. = \frac{2}{3} \times \frac{1-(.82)^2}{\sqrt{10}}$$

$$P.E. = \frac{2}{3} \times \frac{1-.6724}{3.1623} \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{.3276}{3.1623} = .07$$

चूंकि $r = .82$, P.E. के 6 गुने अर्थात् $.07 \times 6 = .42$ से अधिक है अतः सहसंबंध अर्थपूर्ण या सांख्यिक है।

प्रश्न :- निम्न सारणी में 10 विद्यार्थियों के लेखाकर्म तथा संचालकी विषयों पर प्राप्तांकों को दर्शाया गया है सहसंबंध गुणांक प्राप्त करो :- दोनों श्रेणियों के लिए समष्टि 60, 65 कल्पित माध्य मानते हुए संभाव्य विचलन भी प्राप्त करो :-

Student :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Accounting :	45	70	65	30	90	40	50	75	85	60
Stat. :	35	90	70	40	35	40	60	80	80	50

Accountancy = x, Stat. = y

x	dx = 60	dx ²	y	dy = 65	dy ²	dx dy
45	-25	625	35	-30	900	+450
70	10	100	90	25	625	250
65	5	25	70	50	25	-25
30	-30	900	40	-25	625	450
90	30	900	95	30	900	900
40	-20	400	40	-25	625	500
50	-10	100	60	-5	25	50
75	15	225	80	15	125	225
85	25	625	80	15	125	
60	0	0	50	-15	125	
10	+10		10			
N	Σdx	Σdx ²	N	Σdy	Σdy ²	Σdx dy
		3500		410	4400	3525

$$r = \frac{\sum dx dy - \left(\frac{\sum dx \times \sum dy}{N} \right)}{\sqrt{\left[\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N} \right]} \sqrt{\left[\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N} \right]}}$$

$$r = \frac{3525 - \left(\frac{10 \times 10}{10} \right)}{\sqrt{\left[3500 - \frac{(10)^2}{10} \right]} \sqrt{\left[4400 - \frac{(10)^2}{10} \right]}} = \frac{3515}{\sqrt{3490 \times 4390}} = \frac{3515}{3919.2} \approx 0.897$$

$$P.E. = \frac{2}{3} \times \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{1-0.897^2}{\sqrt{10}} = \frac{.19}{3.162} \times \frac{2}{3} \approx \frac{.38}{9.486}$$

यहाँ r = 0.897, P.E. = .04 x 6 = .24 से अधिक है अतः यह संबंध अव्यर्थ है।

r = 0.897, P.E. = .04, अव्यर्थ है।

प्रश्न निम्नलिखित उचाइयो और भारों के बीच क्या सम्पूर्ण सहसंबंध है।

ऊंचाई (इंच): 57, 59, 62, 63, 64, 65, 55, 58, 57

भार (पाउंड): 113, 117, 126, 126, 130, 129, 111, 116, 112

हल: ($r = +.98$, P.E. = .009, सम्पूर्ण है।)

x	$dx = 55$	dx^2	y	$dy = 111$	dy^2	$dx dy$
57	2	4	113	2	4	4
59	4	16	117	6	36	24
62	7	49	126	15	225	105
63	8	64	126	15	225	120
64	9	81	130	19	361	171
65	10	100	129	18	324	180
55	0	0	111	0	0	0
58	3	9	116	5	25	15
57	2	4	112	1	1	2
	<u>45</u>	<u>327</u>		<u>81</u>	<u>1201</u>	<u>621</u>

$$r = \frac{621 - \frac{(45 \times 81)}{9}}{\sqrt{\left[327 - \frac{(45)^2}{9}\right] \left[1201 - \frac{(81)^2}{9}\right]}} \Rightarrow \frac{216}{\sqrt{102 \times 472}} = \frac{216}{213.4}$$

$r = .98$, P.E. के 6 होने अर्थात् $\frac{2}{3} - \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$

$$r = \frac{2}{3} - \frac{1 - (.98)^2}{\sqrt{9}} = \frac{.0792}{3} = .009 \times 6 = .054$$

अतः अधिक है अर्थात् सहसंबंध सम्पूर्ण है।

प्रश्न: दो भेदियों x और y के 14 मूल्यों के वितरित मापों से विचलन निम्न है :- कार्दियसन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करो और बताइए की वह अर्थपूर्ण है या नहीं।

x : +5, -4, -2, +20, -10, 0, +3, 0, -15, -5
 y : +5, -12, -7, +25, -10, -3, 0, +2, -9, -15

हल:-

x	$dx =$	dx^2	y	$dy =$	dy^2	$dx dy$
	+5	25		+5	25	25
	-4	16		-12	144	48
	-2	4		-7	49	14
	+20	400		+25	625	500
	-10	100		-10	100	100
	0	0		-3	9	0
	+3	9		0	0	0
	0	0		+2	4	0
	-15	225		-9	81	135
	-5	25		-15	225	75
	-8	804		-24	1262	897
	Σdx	Σdx^2		Σdy	Σdy^2	$\Sigma dx dy$

$$r = \frac{\Sigma dx dy - \left(\frac{\Sigma dx \times \Sigma dy}{N} \right)}{\sqrt{\left[\Sigma dx^2 - \frac{(\Sigma dx)^2}{N} \right]} \sqrt{\left[\Sigma dy^2 - \frac{(\Sigma dy)^2}{N} \right]}}$$

$$r = \frac{897 - \frac{(-8 \times -24)}{10}}{\sqrt{\left[804 - \frac{(-8)^2}{10} \right]} \sqrt{\left[1262 - \frac{(-24)^2}{10} \right]}} \Rightarrow \frac{897 - 19.2}{\sqrt{[797.6]} \sqrt{[1204.4]}}$$

$$r = \frac{877.8}{\sqrt{960629}} \Rightarrow \frac{877.8}{980.11} = .895$$

$$P.E. = \frac{2}{3} \times \frac{1 - r^2}{\sqrt{N}}$$

$$P.E. = \frac{2}{3} \times \frac{1 - (.895)^2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{1 - .8010}{3.1622}$$

$$P.E. = \frac{2}{3} \times \frac{.199}{3.1622} = \frac{.398}{9.4866} = .04$$

~~P.E. = 6 x .04~~ चूंकी $r = .90$, P.E. के 6 गुने अर्थात् $6 \times .04 = 24$
 के से अधिक है वतः सहसंबंध अर्थपूर्ण है।

एक पद अंशत :-

सूच्य:- निम्न शरणी में विद्यार्थियों और उनमें नियमित खेलारडियों का कितरण प्रस्तुत किया गया है वया आयु और खेलने की आदत में कोई सब संबंध है।

आयु वर्ग (वर्ष) :	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21
विद्यार्थियों की संख्या :	200	270	340	360	400	300
नियमित खेलारडियों की संख्या :	150	162	170	180	180	120 (Ans. - 90)

हल:- माना की आयु = x , खेलने की आदत = y

खेलने की आदत (y) निम्न प्रकार खल प्रतिशत रूप में ज्ञात करेंगे :-

- $\therefore 200$ विद्यार्थियों में से नियमित खेलारडी 150
 $\therefore 100 \times \frac{150 \times 100}{200} = 75$
- $\frac{162 \times 100}{270} = 60$
- $\frac{170 \times 100}{340} = 50$
- $\frac{180 \times 100}{360} = 50$
- $\frac{180 \times 100}{400} = 45$

6.	$\frac{120 \times 100}{300} = 40$						
x	n.v. $\frac{dx}{300}$	$dx = 15.5$	dx^2	y	$dy = 40$	dy^2	$2x dy$
15-16	15.5	0	0	75	35	1225	0
16-17	16.5	1	1	60	20	400	20
17-18	17.5	2	4	50	10	100	20
18-19	18.5	3	9	50	10	100	30
19-20	19.5	4	16	45	5	25	20
20-21	20.5	5	25	40	0	0	0
		<u>15</u>	<u>55</u>		<u>80</u>	<u>1850</u>	<u>90</u>

$$r_0 = \frac{20 - \left(\frac{15 \times 80}{6}\right)}{\sqrt{\left[55 - \frac{(15)^2}{6}\right] \left[1850 - \frac{(80)^2}{6}\right]}}$$

$$r_0 = \frac{-110}{\sqrt{17.5 \times 783.3}}$$

$$r_0 = \frac{-110}{117.08}$$

$$r_0 = -0.94$$

प्रश्न दोनो पद अज्ञात :-

प्रश्न निम्न शून्यता के आधार पर जनसंख्या के घनत्व और मूल्यदर में महसूस संबंध स्थापित करो :-

जिला (क्षेत्रफल का अंश)	जनसंख्या	मूल्य संख्या
A	200	40000
B	150	75000
C	120	72000
D	80	20000

(Ans → 82)

A (x)

मातृसंख्या का घनत्व = $\frac{\text{मातृसंख्या}}{\text{क्षेत्रफल}}$

$A = \frac{40000}{200} = 200$

$B = \frac{75000}{150} = 500$

$C = \frac{72000}{120} = 600$

$D = \frac{20000}{80} = 250$

B y

मातृसंख्या = $\frac{\text{क्षेत्रफल} \times \text{घनत्व}}{\text{मातृसंख्या}}$

$A = \frac{480 \times 1000}{40000} = 12$

$B = \frac{1200 \times 1000}{75000} = 16$

$C = \frac{1080 \times 1000}{72000} = 15$

$D = \frac{280 \times 1000}{20000} = 14$

x	dx = 200	dx ²	y	dy = 12	dy ²	-dx dy
200	0	0	12	9	0	0
500	300	90000	16	4	16	1200
600	400	160000	15	3	9	1200
250	50	2500	14	2	4	100
	750	252500		9	29	2500

$$r = \frac{\sum dx dy - (\sum dx \times \sum dy)}{N} = \frac{2500 - \left(\frac{750 \times 9}{4}\right)}{\sqrt{\left[\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N}\right] \left[\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}\right]}} = \frac{2500 - \left(\frac{750 \times 9}{4}\right)}{\sqrt{\left[252500 - \frac{(750)^2}{4}\right] \left[29 - \frac{(9)^2}{4}\right]}}$$

$$r = \frac{812.5}{\sqrt{111875 \times 8.75}} = \frac{812.5}{989.89}$$

$r = .82$

जब विचलन वर्गों का योग दिया हो तो कार्ल पियर्सन के विचलन सूत्र का प्रयोग करते हैं :-

$$r = \frac{\sum dx dy}{\sqrt{\sum dx^2 \times \sum dy^2}}$$

$$\text{or (or)} \frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2 \times \sum Y^2}}$$

प्रश्न विमन कामगरी से x और y श्रेणी में सहसंबंध गुणांक ज्ञात करो

	x श्रेणी	y श्रेणी
पद कुम्भों की संख्या	15	15
माध्य	25	18
विचलन वर्गों का योग	136	138
x और y श्रेणी के माध्य के विचलनों की गुणजों का योग	122	

हल :-

ज्ञात मूल्य $N = 15$, $\bar{x} = 25$, $\bar{y} = 18$
 $\sum dx^2 = 136$, $\sum dy^2 = 138$, $\sum dx dy = 122$

$$r = \frac{\sum dx dy}{\sqrt{\sum dx^2 \times \sum dy^2}} = \frac{122}{\sqrt{136 \times 138}} = \frac{122}{136.99} = .89$$

प्रश्न :- सहसंबंध गुणांक ज्ञात करो :-

पद कुम्भों की संख्या = 8, x का माध्य = 68, y का माध्य = 69
 x के माध्य से विचलन वर्गों का योग = 36, y के माध्य से
 विचलन वर्गों का योग = 44, x और y के विचलनों के गुणजों
 का योग = 4

हल :-

Ex: - सात मूल्य

$$N = 8, \bar{x} = 68, \bar{y} = 69, \sum dx^2 = 36, \sum dy^2 = 44$$
$$\sum dx dy = 4$$

$$r = \frac{\sum dx dy}{\sqrt{\sum dx^2} \times \sqrt{\sum dy^2}} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{36 \times 44}} = \frac{4}{39.79} = .1$$

उदा प्रमाण विचलन (σ) दिया हो :- तो कार्ल पियर्सन के निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$$r = \frac{\sum dx dy}{N \sigma_x \sigma_y}$$

उदा :- निम्न सूचना में कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें :-

x और y के पदयुग्मों की संख्या = 1000

x श्रेणी का प्रमाण विचलन = 4.5

y श्रेणी का प्रमाण विचलन = 3.6

x और y श्रेणी के विचलनों की गुणाओं का योग = 4800

हल :-

$$N = 1000, \sigma_x = 4.5, \sigma_y = 3.6, \sum dx dy = 4800$$

$$r = \frac{\sum dx dy}{N \sigma_x \sigma_y} \Rightarrow \frac{4800}{1000 \times 4.5 \times 3.6} = \frac{4800}{16200} = .296$$

$$r = .296 \text{ or } .3$$

प्रश्न :- x और y श्रेणी के ~~सदस्य~~ पदसुगमों की संख्या = 15
 x का समांतर माध्य = 25, x का प्रमाप विचलन = 3.01
 y का समांतर माध्य = 18, y का प्रमाप विचलन = 3.03
 x और y श्रेणी के विचलनों के गुणकों का योग = 122
 सह संबंध गुणांक ज्ञात करो :-

हल :-

ज्ञात मूल्य

$$N = 15, \bar{x} = 25, \sigma_x = 3.01$$

$$\bar{y} = 18, \sigma_y = 3.03, E_{x \times y} = 122$$

$$r = \frac{E_{x \times y}}{N \sigma_x \sigma_y} = \frac{122}{15 \times 3.01 \times 3.03} = \frac{122}{136.80} = .89$$

प्रश्न :- यदि $r = .6$ और $N = 16$ हो तो सहसंबंध गुणांक की अर्थपूर्वता की जांच करो :-

हल :-

$$P.E. = \frac{2}{3} \times \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$

$$P.E. = \frac{2}{3} \times \frac{1-.6^2}{\sqrt{16}} = \frac{2}{3} \times \frac{.64}{4} = .1067 \text{ का.}$$

$\therefore r = .60$, P.E. के 6 गुने $11 \times 6 = .66$ से कम है अतः सहसंबंध अर्थपूर्वक या आर्थिक नहीं है।

2पीयरमेंट की कोटी अंतर रीति या वर्गांतर रीति या ग्रेणी सहसंबंध (Rank method)

1. सर्वप्रथम x और y ग्रेणी पर कोटी क्रम (Rank) लिख लिखेंगे। इन्हें हेतु सबसे अधिक मूल्य पर 1 उसके कम मूल्य पर 2 उसके कम मूल्य पर 3 क्रमदा लिखेंगे। यदि कोई मूल्य 1 से अधिक बार आया है तो उसके सामने कोटी क्रमों की औसत लिखेंगे।
2. इसके पश्चात x ग्रेणी के कोटी क्रमों में से y ग्रेणी के कोटी क्रम घपकर कोटी अंतर (D) प्राप्त करेंगे।
3. इसके पश्चात कोटी अंतरों के वर्ग D^2 प्राप्त करके निम्न सूत्र लगाएंगे-

$$r_s = \frac{1 - 6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

$\sum D =$ सदैव 0 होगा।

प्रश्न :- ग्रेणी अंतर विधि द्वारा सहसंबंध गुणांक प्राप्त करो :-

x	Rank	y	Rank	D	D^2
75	5	120	5	0	0
88	2	134	4	-2	4
95	1	150	1	0	0
70	6	115	6	0	0
60	7	110	7	0	0
80	4	140	3	1	1
81	3	142	2	1	1
50	8	100	8	0	0
				<u>0</u>	<u>6</u>

$$r_s = \frac{1 - 6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)} \Rightarrow \frac{1 - 6 \times 6}{8(8^2 - 1)} = \frac{1 - 36}{504} = -0.93$$

संगामी विचलन रीति

Concurrent deviation method

- ① इसमें सर्वप्रथम x और y श्रेणी का प्रत्येक मूल्य की तुलना उनके हीक उपर वाले मूल्य से करते हैं। यदि वह मूल्य उपर वाले मूल्य से अधिक हो तो (+) चिन्ह, कम हो तो (-), यदि समान हो तो (=) चिन्ह लगाते हैं।
- ② इसके पश्चात विचलन चिन्हों का गुणा (Product) करके + चिन्ह गिन लेते हैं। इस हेतु

		Product
+	+	+
-	-	+
=	=	+
+	-	-
=	+ or -	Nil

$$③ V_c = \pm \sqrt{\frac{C - N}{N}}$$

C = Product में + चिन्हों का योग

N = विचलन चिन्हों का योग

प्रश्न :- संगामी विचलन रीति द्वारा कृद संबंध गुणांक ज्ञात करो :-

Income (x)	Sign	Exp. (y)	Sign	Product
65		60		
40	-	55	-	+
35	-	50	-	+
75	+	56	+	+
63	-	30	-	+
80	+	70	+	+
35	-	40	-	+

20	-	35	-	+
80	+	80	+	+
60	-	75	-	+
50	-	80	+	+
				<u>+</u>
				<u>C = 7</u>

$$r_c = \pm \sqrt{\pm \frac{(2C-N)}{N}} \Rightarrow \pm \sqrt{\pm \frac{(2 \times 7 - 10)}{10}}$$

$$\pm \sqrt{\pm \frac{(8)}{10}} \Rightarrow \pm \sqrt{\pm 0.8} = \pm 0.89$$

प्रश्न :- संगामी विचलन विधी द्वारा अठरासंख्य गुणकांक ज्ञात करो :-

खर्च (x)	Sign	मूल्य (y)	Sign	Product
112		106		
125	+	102	-	-
126	+	102	=	Nil
118	-	104	+	-
118	=	98	-	Nil
121	+	96	-	-
125	+	97	+	+
125	=	97	=	+
131	+	95	-	-
135	+	90	-	-
				<u>C = 2</u>

$$r_c = \pm \sqrt{\pm \frac{(2C-N)}{N}} \Rightarrow \pm \sqrt{\pm \frac{(2 \times 2 - 9)}{9}}$$

$$r_c = \pm \sqrt{\pm (-0.5)} = -\sqrt{-0.5} = -0.74$$