

विषय – अर्थशास्त्र

प्रश्न पत्र – शोध प्रविधि

प्रमाप विचलन

**एम.ए. चतुर्थ सेमेस्टर, एम.फिल., एवं पीएच. डी. कोर्स वर्क विद्यार्थीयों के
लिए**

प्रस्तुतकर्ता

डॉ. संग्राम भूषण

प्राध्यापक

अर्थशास्त्र अध्ययनशाला,

विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

प्रस्तावना

प्रमाप विचलन द्वितीयक स्तर का माध्य है। वास्तविकता यह है कि जब हम किसी समंकमाला में दिए गए वास्तविक पद मूल्यों के आधार पर ढी एक केन्द्रीय प्रवृत्ति को ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं तो इसे प्रथम स्तर का माध्य कहा जाता है। लेकिन जब माध्य को आधार मानकर हम किसी अन्य माप को जानने का प्रयत्न करते हैं तो वह द्वितीयक स्तर का माध्य कहा जाता है। लेकिन जब माध्य को आधार मानकर हम

किसी अन्य माप को जानने का प्रयत्न करते हैं तो वह द्वितीयक स्तर का माध्य बन जाता है। मानक विचलन प्रथम स्तर के माध्य पर आधारित इसी प्रकार का माप है। इसका उपयोग विभिन्न पद मूल्यों अथवा इकाईयों का माध्य से विचलन ज्ञात करने के लिए किया जाता है

प्रमाप विचलन का अर्थ :

'प्रमाप विचलन' किसी श्रेणी के विभिन्न पदों के समान्तर माध्य से विचलनों के वर्गों के समान्तर माध्य का वर्गमूल होता है।

प्रमाप विचलन के लिए ग्रीक अक्षर Ζ का प्रयोग किया जाता है।

प्रमाप विचलन का गुणक प्रमाप विचलन को समान्तर माध्य से विभाजित कर प्राप्त किया जाता है।

प्रमाप विचलन का गुणांक = σ / \bar{x} जहाँ σ = प्रमाप विचलन
 = समान्तर माध्य।

परिभाषा

डी. एन. एल्हान्स के अनुसार – “मानक विचलन अंक गणितीय माध्य से मापे गये विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल है।”

प्रमाप विचलन निकालने की रीति

(अ) प्रत्यक्ष रीति :

यदि समंक माला का समान्तर माध्य पूर्णक में आता है तो इस रीति से प्रमाप विचलन निकालना सरल होता है।

गणना विधि :

इस रीति से प्रमाप विचलन निकालते समय निम्न क्रियाएँ करनी पड़ती है –

1. समंकमाला के मूल्यों का समान्तर माध्य निकालते हैं।
2. इस प्राप्त माध्य से समंकमाला के विभिन्न मूल्यों का विचलन निकालते हैं।

$$x - \bar{x} = dx$$

3. इन विचलनों का वर्ग निकाल कर उनका योग कर लेते हैं।
4. विचलन के वर्गों के योग में पदों की संख्या का भाग ($\sum d^2/N$) दे देते हैं।
5. प्राप्त भजनफल का वर्गमूल निकाल लेते हैं।

यही वर्गमूल प्रमाप विचलन होता है। इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

जहाँ σ = प्रमाप विचलन

d^2 = समान्तर माध्य से ज्ञात किए गए विचलनों का वर्ग

N = कुल पद संख्या

लघु रीति :

समान्तर माध्य प्रायः पूर्णांक में नहीं आता। ऐसी दशा में विचलन भी पूर्णांक नहीं होंगे। फिर उनका वर्ग लेना कठिन कार्य है। इस असुविधा से बचने के लिए लघु रीति से प्रमाप विचलन निकाला जाता है।

गणना विधि :

इस रीति से प्रमाप विचलन निकालते समय निम्न क्रियाएँ करनी पड़ती है :—

1. पदमाला के मूल्यों में से किसी मूल्य को कल्पित माध्य मान लेते हैं।
2. इस कल्पित माध्य से श्रेणी के प्रत्येक मूल्य का विचलन निकालते हैं। विचलन निकालते समय धन व ऋण चिन्हों को ध्यान में रखा जाता है। इन विचलनों का योग कर लेते हैं।
3. प्रत्येक विचलन का वर्ग कर लेते हैं और उसका जोड़ ज्ञात कर लेते हैं।
4. निम्न सूत्र का प्रयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कर लिया जाता है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2 x}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N} \right)^2}$$

जहाँ σ = प्रमाप विचलन

dx = कल्पित माध्य से विचलन

d^2x = कल्पित माध्य से प्राप्त विचलनों का वर्ग

N = पदों की संख्या

मूल्य वर्ग रीति

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - (\bar{X})^2}$$

खण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन :

खण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने के लिए प्रत्यक्ष तथा लघु दोनों विधियों का प्रयोग किया जाता है।

प्रत्यक्ष विधि द्वारा :

इस विधि से प्रमाप विचलन निम्न क्रियाएँ करनी पड़ती है –

1. पदमाला का समान्तर माध्य निकाल लेते हैं।
2. इस समान्तर माध्य से पदमाला के प्रत्येक मूल्य का विचलन निकालते हैं।
विचलन निकालते समय धन व ऋण चिन्हों को ध्यान में रखा जाता है।
3. प्रत्येक विचलन का वर्ग कर लेते हैं।
4. प्रत्येक विचलन के वर्ग को उसके सामने वाली आवृत्ति से गुण करते हैं
5. विचलन के वर्ग व तत्संबंधी आवृत्ति के गुणनफलों को जोड़ देते हैं।
6. इस जोड़ में आवृत्तियों की कुल संख्या से भाग देते हैं।
7. भजनफल का वर्गमूल निकाल लेते हैं।

प्राप्त फल प्रमाप विचलन होता है। इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$$

जहाँ fd^2 = विचलन वर्ग व संबंधित आवृत्ति का गुणनफल

N = आवृत्तियों का योग

उदाहरण – निम्नांकित आवृत्ति बंटन का माध्य एवं प्रमाप विचलन एवं इसका गुणांक ज्ञात कीजिए ?

दुर्घटनाओं की संख्या	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रभावित व्यक्ति	16	16	21	10	16	8	4	2	1	2	2	0	2

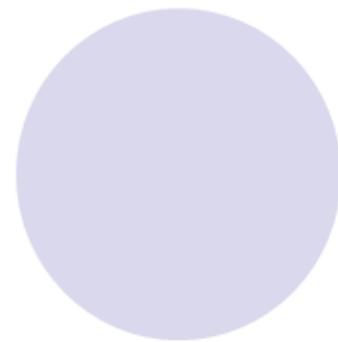
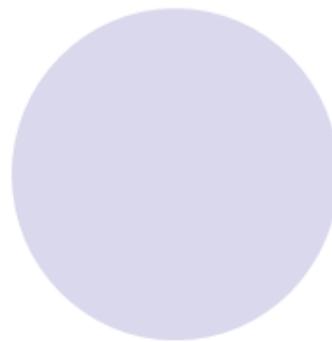
X	f	fx	dx	d²	fd²
0	16	0	-3	9	144
1	16	16	-2	4	64
2	21	42	-1	1	21
3	10	30	0	0	0
4	16	64	1	1	16
5	8	40	2	4	32
6	4	24	3	9	36
7	2	14	4	16	32
8	1	8	5	25	25
9	2	18	6	36	72
10	2	20	7	49	98
11	0	0	8	64	0
12	2	24	9	81	162
	100	300			702

समान्तर माध्य

$$\bar{X} = \frac{\sum f_x}{N}$$

$$= \frac{300}{100}$$

$$\bar{X} = 3$$



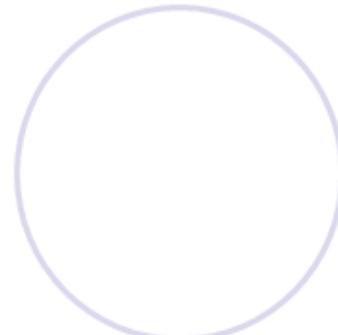
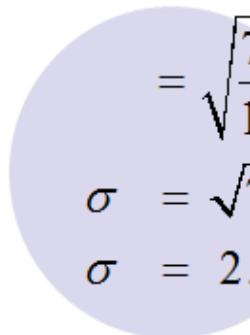
प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f d^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{702}{100}}$$

$$\sigma = \sqrt{7.02}$$

$$\sigma = 2.64$$



प्रमाप विचलन गुणांक

$$= \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

$$= \frac{2 . 6 . 4}{3}$$

$$= 0 . 8 . 8$$

लघु रीति द्वारा गणना विधि :—

इस विधि से प्रमाप विचलन निकालते समय निम्न क्रियाएँ पड़ती हैं –

1. पदमाला के मूल्यों में से किसी भी मूल्य को कल्पित माध्य मान लेते हैं
2. इस कल्पित माध्य से पदमाला के प्रत्येक मूल्य का विचलन $dx = (X - A)$ निकालते हैं। विचलन निकालते समय धन व ऋण चिन्हों को ध्यान में रखा जाता है।
3. विचलनों का वर्ग कर लेते हैं
4. विचलनों के वर्ग में तत्संबंधित आवृत्ति का गुणा करते हैं।
5. fdx एवं fd^2x का योग करते हैं।

अन्त में, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N} - \left(\frac{\sum f dx}{N} \right)^2}$$

जहाँ fd^2x कल्पित माध्य से प्राप्त विचलन के वर्ग का तत्सम्बन्धी आवृत्ति से गुणनफल है तथा $N = \sum f$ है।

अखण्डत श्रेणी में प्रमाप विचलन –

अखण्डत श्रेणी में वर्गों के मध्य बिन्दु ज्ञात कर लिए जाते हैं। उसके बाद अखण्डत श्रेणी में प्रमाप विचलन निकालने की रीति ठीक वह है जो खण्डत श्रेणी में है। इसके अन्तर्गत प्रमाप विचलन निकालने की निम्न विधियाँ हैं –

1. प्रत्यक्ष विधि
2. लघु विधि
3. योग या आकलन विधि
4. पद–विचलन विधि
(पद विचलन द्वारा)

उदाहरण – संसद के 100 सदस्यों का आयु के अनुसार बंटन निम्नलिखित है। इसका प्रमाप विचलन और गुणांक ज्ञात कीजिए ?

आयु	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
सदस्यों की संख्या	3	51	25	5	9	7

हल :-

आयु	m.v.	f	$dx = (X - 55)/10$	fdx	fdx^2
30-40	35	3	-2	-6	12
40-50	45	51	-1	-51	51
50-60	55	25	0	0	0
60-70	65	5	1	5	5
70-80	75	9	2	18	36
80-90	85	7	3	21	63
		100		-13	167

$$\bar{X} = a + \frac{\sum f dx}{\sum f} \times i$$

$$= 55 + \frac{(-13)}{100} \times 10$$

$$\bar{X} = 55 - 1.3$$

$$\bar{X} = 53.7$$

प्रमाप विचलन :-

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f d^2 x}{\sum f} - \left(\frac{\sum f dx}{\sum f} \right)^2}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{167}{100} - \left(\frac{-13}{100} \right)^2} \times 10 \\ &= \sqrt{1.67 - (0.13)^2} \times 10 \\ &= \sqrt{1.67 - 0.0169} \times 10 \\ &= \sqrt{1.6581} \times 10\end{aligned}$$

$$\sigma = 1.28 \times 10$$

$$\sigma = 12.8$$

गुणांक :-

$$= \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

गुणांक :-

$$= \frac{12.8}{53.7} = 0.23$$

योग या आकलन विधि :

यदि वर्गों के विस्तार समान है तो प्रमाप विचलन की गणना योग विधि से भी हो सकती है। जिसकी क्रिया निम्न प्रकार है।

1. प्रथम संचयी आवृत्तियों के योग में कुल आवृत्तियों के योग का भाग देकर F_1 ज्ञात किया जाता है अर्थात्

$$f_1 = \frac{\sum c f_1}{\sum f}$$

2. संचयी आवृत्तियों की भी संचयी आवृत्ति के योग अर्थात् द्वितीय संचयी योग में कुल आवृत्तियों के योग का भाग देकर F_2 ज्ञात किया जाता है।

$$f_2 = \frac{\sum c f_2}{\sum f}$$

3. प्रमाप विचलन के सूत्र का प्रयोग किया जाता लें

$$\sigma = ix \sqrt{2f_2 - f_1 - f_1^2}$$

उदाहरण – अँकड़ों का योग विधि के द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ?

आयु	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
व्यक्तियों की संख्या	15	15	23	22	25	10	5	10

X	f	cf1	cf2
0-10	15	15	15
10-20	15	30	45
20-30	23	53	98
30-40	22	75	173
40-50	25	100	273
50-60	10	110	383
60-70	5	115	498
70-80	10	125	623
योग	125	623	2108

$$f_1 = \frac{\sum cf_1}{\sum f}$$

$$f_1 = \frac{623}{125}$$

$$f_1 = 4.984$$

$$f_2 = \frac{\sum cf_2}{\sum f}$$

$$f_2 = \frac{2108}{125}$$

$$f_2 = 16.864$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma = i \times \sqrt{2f_2f_1f_1^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{2 \times 16.86 - 4.98 - (4.98)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{33.72 - 4.98 - 24.80}$$

$$= 10 \times \sqrt{33.72 - 29.78}$$

$$= 10 \times \sqrt{3.94}$$

$$= 10 \times 1.98$$

$$\sigma = 19.8$$

चार्लियर की शुद्धता की जाँच :

गणितीय माध्य की गणनाओं की शुद्धता की जाँच करने के सूत्र की तरह चार्लियर ने प्रमाप विचलन की गणनाओं की शुद्धता की जाँच हेतु भी एक सूत्र प्रस्तुत किया है जो निम्न प्रकार है।

1. लघु रीति के लिए $-\sum\{f(dx+1)^2\} = \sum f dx^2 + 2 \sum f dx + \sum f$
2. पद विचलन रीति के लिए $-\sum f(ds+1)^2 = \sum f ds^2 + 2 \sum f ds + \sum f$

गणना विधि –

1. पहले $(dx + 1)$ या $(ds + 1)$ निकालते हैं।
2. $(dx + 1)$ या $(ds + 1)$ का वर्ग करते हैं अर्थात् $(ds + 1)^2$ या $(dx+1)^2$
3. $(dx + 1)^2$ या $(ds + 1)^2$ को f से गुणा करके गुणनफल का योग ज्ञात करते हैं अर्थात् $\sum f(dx+1)^2$ या $\sum f (ds + 1)^2$ फिर सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

प्रमाप विचलन के गुण

1. उच्चतर गणितीय अध्ययन में प्रयोग : गणितीय दृष्टि से प्रमाप विचलन पूर्णतया शुद्ध होने के कारण प्रयोग उच्चतर अध्ययनों में होता है।
2. समस्त मूल्यों पर आधारित : यह माप पदमाला के सभी मूल्यों पर आधारित होता है। इसलिए पूर्णतया शुद्ध होता है।
3. बीजगणितीय नियमों का पालन : विचलनों के वर्गों के द्वारा यहाँ बीजगणितीय नियमों का पूर्णतया पालन होता है। ऋणात्मक विचलन भी वर्ग करने में धनात्मक हो जाते हैं।

प्रमाप विचलन के दोष : प्रमाप विचलन के निम्न दोष हैं –

1. गणना-क्रिया कठिन : इसकी गणना करने की क्रिया कठिन होने के कारण सर्वसाधारण के लिए असुविधाजनक है।
2. समझना कठिन : गणना क्रिया कठिन होने के कारण इसे जनसामान्य के द्वारा समझना भी कठिन है।
3. अति-सीमान्त पदों का अधिक महत्व : यह माध्य की सहायता से निकाला जाता है। इसलिए यह चरम पदों को अधिक महत्व देता है। फलस्वरूप प्रमाप विचलन बढ़ जाता है।

निष्कर्ष :

जिस प्रकार केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों में समान्तर माध्य संतोषजनक माध्य होता है। उसी प्रकार अपक्रिय मापों में प्रमाप विचलन आदर्श माना जाता है।

इसके पश्चात् भी यह सरलतापूर्वक निष्कर्ष दिया जा सकता है कि सामाजिक अनुसंधान विभिन्न घटनाओं के समान और स्थिर तत्वों की जानकारी प्राप्त करने के लिए प्रमाप विचलन एक महत्वपूर्ण विधि है। इसी की सहायता से सामाजिक घटनाओं की प्रवृत्ति के बारे में वास्तविक अनुमान लगाया जा सकता है।

सन्दर्भ ग्रन्थ सूची:

- 1 अग्रवाल, अनुपम, (2009), 'अर्थशास्त्र यू. जी. नेट', उपकार प्रकाशन, आगरा,
- 2 अग्रवाल, जे. के. एवं गोविन्दानी, एफ. एम. (1977), 'सांख्यिकी के सिद्धान्त', ओरियन्टल पब्लिशर्स एण्ड डिस्ट्रीब्यूटर्स, इलाहाबाद,
- 3 गुप्ता, वी. एन., (1984), 'सांख्यिकी', साहित्य भवन, आगरा,
- 4 एलहंस, देवकी नंदन, (1972), 'सांख्यिकी के सिद्धान्त', किताब महल, इलाहाबाद,
- 5 नागर, कैलाश नाथ, (1975), 'सांख्यिकी के मूल तत्व', मीनाक्षी प्रकाशन, दिल्ली,
- 6 पाण्डेय, शीलस्वरूप एवं अग्रवाल, गोपालकृष्ण, (2008), 'सामाजिक शोध एवं सांख्यिकी', साहित्य भवन पब्लिशर्स एण्ड डिस्ट्री ब्यूटर्स प्रा. लि. 34, लाजपत कुंज, आगरा,
- 7 श्रीवास्तव, जी. एल., (1975), 'सांख्यिकी के मूल सिद्धान्त', साइन्टिफिक बुक एजेन्सी, कलकत्ता,
- 8 शुक्ल, एस. एम. एवं सहाय, शिवपूजन, (2003), 'सांख्यिकीय विश्लेषण', साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा,
- 9 वार्ष्ण्य, जे. सी., (1980), 'उच्चतर सांख्यिकी', कैलाश पुस्तक सदन, ग्वालियर,
- 10 यादव, आर. के., जैन, एम. एल. एवं मित्तल, एस. एन. (1976), 'सांख्यिकीय विधियाँ', नेशनल पब्लिशिंग हाउस, नई दिल्ली, .

- Thank you